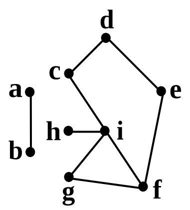
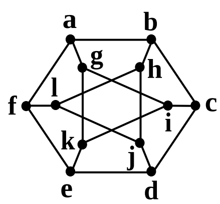
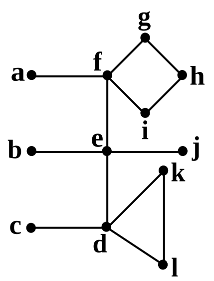
ردیف		نمره
۱	گزارهٔ درست و نادرست را مشخص کنید. الف) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، همواره بزرگ‌تر از میانگین هندسی آن‌ها است. ب) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a\mid b$، آنگاه $\lvert a\rvert \le \lvert b\rvert$ است. پ) باقی‌ماندهٔ تقسیم $A=۰!+۱!+۲!+\dots+۲۰۰!$ بر عدد ۱۵ برابر ۴ است. ت) در گراف کامل مرتبهٔ ۵، همسایگی بستهٔ هر رأس ۵ عضو دارد.	۱
۲	در جاهای خالی کلمات، اعداد و یا عبارات مناسب قرار دهید. الف) اگر a عددی فرد و $b\mid a+۴۰۰$، در این صورت باقی‌ماندهٔ $۲a^۲+b^۲-۳$ بر عدد ۸ برابر .... است. ب) در گراف G بین هر دو رأس گراف حداقل یک مسیر وجود دارد. گراف G را .... می‌نامیم. پ) مجموع عدد احاطه‌گری گراف‌های $P_۵$ و $C_۵$ برابر .... است. ت) با ارقام ۴،۴،۲،۳،۳،۱ می‌توان به تعداد .... عدد شش‌رقمی نوشت.	۱
۳	با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^۲+y^۲+۸\ge (x+۱)(۳-y)$	۱/۲۵
۴	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵ و ۶ به‌ترتیب برابر ۳ و ۴ باشد، با استفاده از قضیهٔ تقسیم باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۰ را بیابید.	۱/۲۵
۵	اگر $a\mid ۳m-۱$ و $a\mid ۵m+۲$، در این صورت چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد؟ (مقادیر را مشخص کنید.)	۱
۶	باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۴۰^{۳۰}-۱۰$ بر عدد ۱۳ را بیابید.	۰/۵
۷	علی می‌خواهد ۴۲۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی و ۳۰۰۰ تومانی تبدیل کند و کمترین تعداد اسکناس را داشته باشد. چه تعداد از هرکدام باید در نظر بگیرد؟	۱
۸	با توجه به گراف مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) درجهٔ رأس e در گراف مکمل را بیابید. ب) دوری به طول ۶ بنویسید. پ) مسیری به طول ۵ از f به h بنویسید. ت) مجموعهٔ $N_G[a]$ را مشخص کنید. ث) آیا گراف همبند است؟ چرا؟  G	۱/۵
۹	گراف زیر را در نظر بگیرید: الف) عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل به‌دست آورید. ب) آیا مجموعهٔ $D=\{a,d,i,k\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؟ چرا؟ پ) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی بنویسید.  	۲

ردیف		نمره
۱۰	گراف P_6 را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) عدد احاطه‌گری گراف را تعیین کنید. ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن بنویسید. پ) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم برای آن بنویسید.	۱/۵
۱۱	در گراف روبه‌رو: الف) مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال $\{a,f,h,b,j,d\}$ را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید. ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم شامل رأس h بنویسید. پ) با اضافه نمودن چه یالی عدد احاطه‌گری گراف برابر ۳ می‌شود؟  	۱/۲۵
۱۲	می‌خواهیم ۷ زوج زن و شوهر را در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر زوج زن و شوهر مقابل یکدیگر بنشینند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟	۱
۱۳	معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5^2=12$ چند جواب صحیح و نامنفی با شرایط $x_1>3$ و $x_4=3$ دارد؟	۱/۷۵
۱۴	بر روی درایه‌های مربع لاتین A جایگشت $\begin{matrix}1\to 2\\ 2\to 3\\ 3\to 1\\ 4\to 4\end{matrix}$ را اعمال می‌کنیم تا مربع لاتین B حاصل شود. در مربع لاتین B جای ستون‌های اول و چهارم را عوض می‌کنیم تا مربع لاتین C حاصل شود. مربع‌های B و C را نوشته و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) آیا مربع‌های A و B متعامدند؟ چرا؟ ب) آیا مربع‌های B و C متعامدند؟ چرا؟ $A=\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1&3&4&2\\\hline 4&2&1&3\\\hline 2&1&3&4\\\hline 3&4&2&1\\\hline\end{array}$	۱/۵
۱۵	چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵,۶ می‌توان نوشت به‌طوری‌که هر رمز، حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۵ را شامل باشد؟ (نیازی به محاسبهٔ پاسخ نهایی نیست.)	۱/۵
۱۶	مجموعهٔ اعداد $A=\{1,2,3,\dots,83,84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان ۸۵ است.	۱

موفق باشید

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

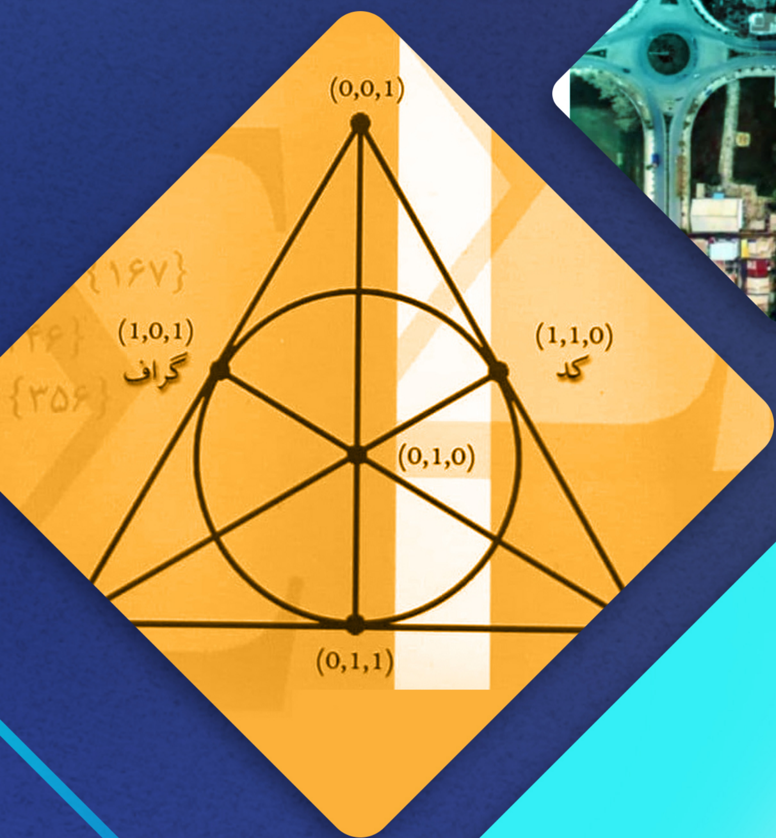
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

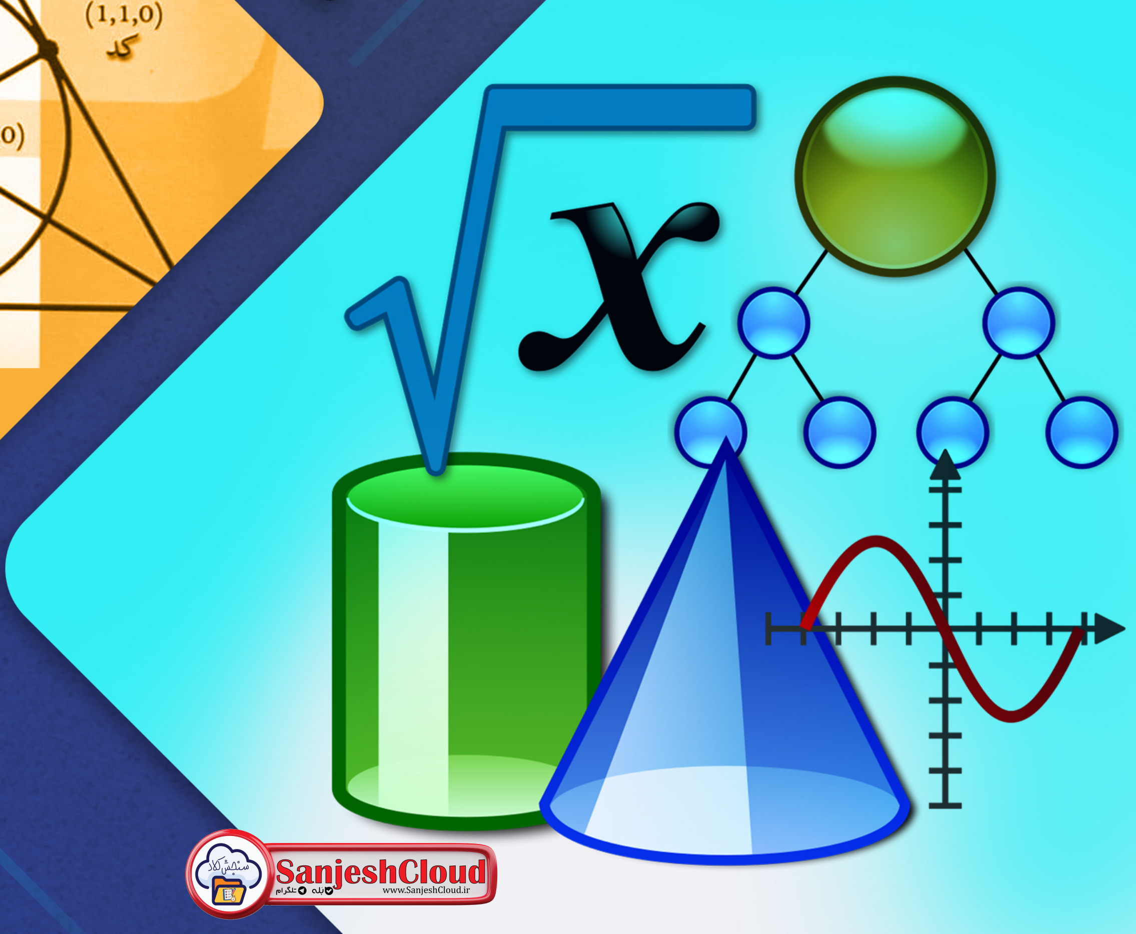
اردیبهشت ۱۴۰۴

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۴

ریاضیات گسسته (رشته ریاضی و فیزیک)





۱۴۰۳_۱۴۰۴

-۱

الف) نادرست؛ مثال نقض $a=b=۱$ را در نظر بگیرید که میانگین حسابی و هندسی دو عدد برابر می‌شود.

ب) نادرست؛ اگر $b=۰$ باشد، a می‌تواند هر عدد غیرصفری باشد و در نتیجه $|a|>|b|$ می‌شود.

پ) درست؛ زیرا:

$$A=۰!+۱!+۲!+۳!+۴!+\underbrace{۵!+...+۲۰۰!}_{۰}\overset{۱۵}{\equiv}۱+۱+۲+۶+۲۴\overset{۱۵}{\equiv}۳۴\overset{۱۵}{\equiv}۴$$

ت) درست؛ چون گراف کامل است، بنابراین همهٔ رئوس به هم وصل هستند.

-۲

الف) صفر

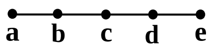
چون a عددی فرد است، $a+۴۰۰$ نیز عددی فرد است و چون b آن را عاد می‌کند، b نیز عددی فرد است. می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به‌صورت $۸k+۱$ نوشت. بنابراین:

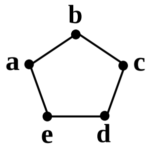
$$۲a^۲+b^۲-۳=۲(۸k+۱)+(۸k'+۱)-۳=۱۶k+۲+۸k'+۱-۳=۸(۲k+k')=۸k''$$

ب) همبند

گرافی که بین هر دو رأس از آن حداقل یک مسیر وجود دارد، گراف همبند نامیده می‌شود.

پ) ۴

گراف $P_۵$ به‌صورت  است و عدد احاطه‌گری آن برابر ۲ است. مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم آن را می‌توان به‌صورت $\{b,d\}$ در نظر گرفت.

گراف $C_۵$ به‌صورت  است و عدد احاطه‌گری آن برابر ۲ است. مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم آن را می‌توان به‌صورت $\{a,c\}$ در نظر گرفت.

ت) ۱۸۰

با استفاده از قضیهٔ جایگشت با تکرار، داریم:

$$\frac{۶!}{۲!\times۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱\times۲\times۱}=۱۸۰$$

-۳

نکته (اثبات بازگشتی): در اثبات برخی نامساوی‌های ریاضی، ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. آنگاه با بازگشت از مسیر طی‌شده به نامساوی اولیه می‌رسیم و ازآنجایی‌که همهٔ عملیات مسیر رفت، بازگشت‌پذیرند به این نوع اثبات، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

با استفاده از نکتهٔ بالا، داریم:

$$x^۲+y^۲+۸\ge(x+۱)(۳-y)\Leftrightarrow x^۲+y^۲+۸\ge۳x-xy+۳-y\Leftrightarrow x^۲+y^۲-۳x+xy+y+۵\ge۰$$

طرفین نامساوی بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲-۶x+۲xy+۲y+۱۰\ge۰$$

$$\Leftrightarrow x^۲+۲xy+y^۲+x^۲-۶x+۹+y^۲+۲y+۱\ge۰\Leftrightarrow(x+y)^۲+(x-۳)^۲+(y+۱)^۲\ge۰$$ بدیهی‌است.

-۴

نکته (قضیهٔ تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a=bq+r$ و $۰\le r<b$.

با استفاده از نکتهٔ بالا، داریم:

$$a=۵q+۳\xrightarrow{\times۶}۶a=۳۰q+۱۸$$

$$a=۶q'+۴\xrightarrow{\times۵}۵a=۳۰q'+۲۰$$

طرفین دو رابطهٔ بالا را از هم کم می‌کنیم، داریم:

$$۶a-۵a=۳۰q+۱۸-۳۰q'-۲۰\Rightarrow a=۳۰q-۳۰q'-۲\Rightarrow a=۳۰q-۳۰q'-۱۰+۱۰-۲$$

$$\Rightarrow a=۱۰(\underbrace{۳q-۳q'-۱}_{k})+۸\Rightarrow a=۱۰k+۸$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۰ برابر ۸ است.

۵-

نکته: به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid mb+nc$$

با استفاده از نکتهٔ بالا، داریم:

$$\left.\begin{matrix} a \mid ۳m-۱ \\ a \mid ۵m+۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid ۳(۵m+۲)-۵(۳m-۱) \Rightarrow a \mid ۱۵m+۶-۱۵m+۵ \Rightarrow a \mid ۱۱ \xrightarrow{a\in N} a=۱,۱۱$$

۶-

نکته: دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. $(n \in N)$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

نکته: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b برابر r باشد، داریم: $۰ \le r < b \ , \ a \overset{b}{\equiv} r$

با استفاده از نکات بالا، داریم:

$$۴۰ \overset{۱۳}{\equiv} ۴۰ \Rightarrow ۴۰ \overset{۱۳}{\equiv} ۴۰-۳\times۱۳ \Rightarrow ۴۰ \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳۰}} ۴۰^{۳۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۳۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴۰^{۳۰}-۱۰ \overset{۱۳}{\equiv} ۱-۱۰ \overset{۱۳}{\equiv} -۹ \Rightarrow ۴۰^{۳۰}-۱۰ \overset{۱۳}{\equiv} -۹+۱۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۴$$

بنابراین، باقی‌مانده برابر ۴ است.

۷-

نکته: هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $a,b,c \in Z$ در این صورت معادلهٔ مذکور $(ax+by=c)$ را یک معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

نکته: برای حل معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$، ابتدا یکی از معادلات هم‌نهشتی $ax \overset{b}{\equiv} c$ یا $by \overset{a}{\equiv} c$ را حل می‌کنیم و با جای‌گذاری جواب در معادلهٔ اصلی، جواب‌های متغیر دیگر را نیز به دست می‌آوریم.

اگر x اسکناس ۵۰۰۰ تومانی و y اسکناس ۳۰۰۰ تومانی داشته باشد، خواهیم داشت:

$$۵۰۰۰x+۳۰۰۰y=۴۲۰۰۰ \xrightarrow{\div ۱۰۰۰} ۵x+۳y=۴۲$$

برای حل معادلهٔ سیاله، آن را به معادلهٔ هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \Rightarrow ۵x-۳x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \xrightarrow[(۲,۳)=۱]{\div ۲} x \overset{۳}{\equiv} ۲۱ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x=۳k \xrightarrow{x\ge۰} ۳k\ge۰ \Rightarrow k\ge۰ \\ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادلهٔ اصلی}} ۵(۳k)+۳y=۴۲ \Rightarrow y=-۵k+۱۴ \xrightarrow{y\ge۰} -۵k+۱۴\ge۰ \Rightarrow k\le\frac{۱۴}{۵} \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow ۰ \le k \le \frac{۱۴}{۵}$$

اکنون داریم:

$$\begin{cases} k=۰ \Rightarrow x=۰ \ , \ y=۱۴ \Rightarrow x+y=۱۴ \\ k=۱ \Rightarrow x=۳ \ , \ y=۹ \Rightarrow x+y=۱۲ \\ k=۲ \Rightarrow x=۶ \ , \ y=۴ \Rightarrow x+y=۱۰ \checkmark \end{cases}$$

بنابراین، ۴۲۰۰۰ تومان را باید به ۶ اسکناس ۵۰۰۰ تومانی و ۴ اسکناس ۳۰۰۰ تومانی تبدیل کرد.

-۸

نکته (مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس): فرض کنیم $v \in V(G)$، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردنِ خود رأسِ v به $N_G(v)$ «همسایگی بستهٔ رأس v» را به‌دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v)=\{u \in V(G); uv \in E(G)\} \qquad N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$$

نکته (مسیر): اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک u -v مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به‌طوری‌که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأس u، یک مسیر است با طول صفر از رأس u به خودش.

نکته (دور): دنبالهٔ $v_1v_2v_3\ldots v_nv_1$ $(n \ge ۳)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

نکته (همبندی و ناهمبندی یک گراف): گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

نکته: اگر G یک گراف با n رأس و u یک رأسِ آن باشد و $d_G(u)$ و $d_{\bar{G}}(u)$ به‌ترتیب درجهٔ رأس u در گراف‌های G و $\bar{G}$ باشند، داریم:

$$d_G(u)+d_{\bar{G}}(u)=n-۱$$

با استفاده از نکات بالا، داریم:

الف)

$$n=۹\ ,\ \deg_G(e)+\deg_{\bar{G}}(e)=n-۱ \Rightarrow ۲+\deg_{\bar{G}}(e)=۹-۱ \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(e)=۶$$

ب) دوری به طول ۶: cdefgic

پ) مسیری به طول ۵ از f به h: fedcih

ت) $N_G[a]=\{a,b\}$

ث) خیر، زیرا به‌عنوان مثال هیچ مسیری بین دو رأس a و c وجود ندارد.

-۹

نکته: زیرمجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

نکته: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right] \le |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازهٔ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right] \le \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right]$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

نکته: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

با استفاده از نکات بالا، داریم:

الف)

$$n=۱۲\ ,\ \Delta=۳ \Rightarrow \gamma \ge \left[\frac{۱۲}{۳+۱}\right] \Rightarrow \gamma \ge ۳$$

توجه کنید که گراف با ۳ رأس احاطه نمی‌شود. با توجه به شکل گراف مجموعهٔ $\{a,d,k,h\}$ احاطه‌گر است، پس: $\gamma=۴$

ب) خیر، زیرا رئوس h و l احاطه نشده‌اند.

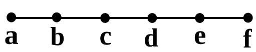
پ) $\{a,b,c,d,e,f\}$

-۱۰

الف)

نکته (گراف مسیر): گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم.

نکته: در گراف‌های P_n عدد احاطه‌گری برابر $\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right]$ است.

اگر $P_۶$ را به‌صورت 

در نظر بگیریم، داریم:

$$\gamma=\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right] \Rightarrow \gamma=\left[\frac{۶}{۳}\right] \Rightarrow \gamma=۲$$

ب) مجموعهٔ $\{b,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف است.

پ)

نکته: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

طبق نکته مجموعهٔ $\{a,c,f\}$ یا $\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف است.

-۱۱

نکته: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

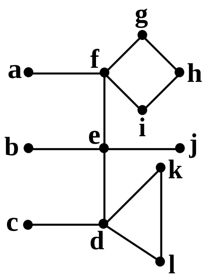
نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

با استفاده از نکات بالا، داریم:

الف) با حذف رأس a از مجموعهٔ داده‌شده، مجموعهٔ باقی‌مانده احاطه‌گر مینیمال است و دیگر هیچ‌کدام از رئوس آن را نمی‌توان حذف کرد.

$\{f,h,b,j,d\}$

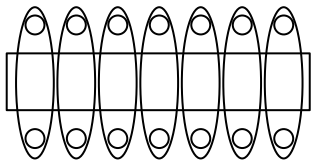
ب) $\{h,f,e,d\}$



پ) عدد احاطه‌گری گراف برابر $\gamma=۴$ است و با اضافه کردن یال‌های fh یا eh یا dh یا ah یا ae یا ad عدد احاطه‌گری گراف برابر $\gamma=۳$ می‌شود.

$$\text{مجموعه}-\gamma=\{f,e,d\}\Rightarrow \gamma=۳$$

-۱۲



طبق شکل، اگر هر زوج زن و شوهر مقابل هم را یک شی در نظر بگیریم، ابتدا باید جایگشت ۷ شی را حساب کنیم که برابر !۷ است. با توجه به اینکه هر زوج زن و شوهر ۲ حالت جابه‌جایی دارند، تعداد کل حالات برابر است با:

$$۷!\times\underbrace{۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲}_{\text{۷تا}}=۷!\times۲^{۷}$$

-۱۳

نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه‌گل از بین k نوع گل یعنی برابر است با $\binom{n+k-۱}{k-۱}$.

با در نظر گرفتن شرایط $x_۱>۳$ و $x_۴=۳$ و جای‌گذاری آن‌ها در معادله، داریم:

$$x_۱>۳\Rightarrow x_۱\geq۴\Rightarrow x_۱-۴\geq۰\ ,\ x_۱-۴=y_۱\Rightarrow x_۱=۴+y_۱\ ,\ y_۱\geq۰$$

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵^۲=۱۲\Rightarrow ۴+y_۱+x_۲+x_۳+۳+x_۵^۲=۱۲\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+x_۵^۲=۵$$

مقادیر ممکن برای $x_۵$ را در نظر گرفته و داریم:

$$x_۵=۰\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳=۵\xrightarrow[k=۳]{n=۵}\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

$$x_۵=۱\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳=۴\xrightarrow[k=۳]{n=۴}\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

$$x_۵=۲\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳=۱\xrightarrow[k=۳]{n=۱}\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{۳}{۲}=۳$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها}=۲۱+۱۵+۳=۳۹$$

-۱۴

نکته: دو مربع لاتین متعامد: فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به‌طوری‌که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «متعامدند» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

A =

۱	۳	۴	۲
۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۴
۳	۴	۲	۱

$۱\rightarrow۲$
$۲\rightarrow۳$
$۳\rightarrow۱$
$۴\rightarrow۴$

B =

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲

$\Rightarrow$ C =

۳	۱	۴	۲
۱	۳	۲	۴
۴	۲	۱	۳
۲	۴	۳	۱

الف) B و A متعامد نیستند، زیرا در مربع مقابل عدد تکراری مانند ۱۲ وجود دارد.

$AB =$

۱۲	۳۱	۴۴	۲۳
۴۴	۲۳	۱۲	۳۱
۲۳	۱۲	۳۱	۴۴
۳۱	۴۴	۲۳	۱۲

ب) C و B متعامد نیستند، زیرا در مربع مقابل عدد تکراری مانند ۴۴ وجود دارد.

$BC =$

۲۳	۱۱	۴۴	۳۲
۴۱	۳۳	۲۲	۱۴
۳۴	۲۲	۱۱	۴۳
۱۲	۴۴	۳۳	۲۱

-۱۵

نکته: برای دو مجموعهٔ A و B از مجموعهٔ مرجع S داریم:

۱) $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

۲) $|A-B| = |A| - |A\cap B|$

۳) $|\bar{A}\cap\bar{B}| = |\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B|$

ابتدا تعداد کل رمزهای ممکن را می‌یابیم:

$|S| = ۶\times۶\times۶\times۶ = ۶^۴$

تعداد رمزهای فاقد رقم ۲ را $|A|$ و تعداد رمزهای فاقد رقم ۵ را $|B|$ در نظر گرفته و داریم:

$|A| = |B| = ۵\times۵\times۵\times۵ = ۵^۴$

تعداد رمزهای فاقد ارقام ۲ و ۵ معادل $|A\cap B|$ است، که برابر است با:

$|A\cap B| = ۴\times۴\times۴\times۴ = ۴^۴$

خواستهٔ سؤال $|\bar{A}\cap\bar{B}|$ است که برابر است با:

$$|\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B| = |S| - |A| - |B| + |A\cap B| \Rightarrow |\overline{A\cup B}| = ۶^۴ - ۵^۴ - ۵^۴ + ۴^۴ = ۶^۴ + ۴^۴ - ۲\times۵^۴$$

-۱۶

نکته (اصل لانه‌کبوتری): اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

اعداد داده‌شده را به‌گونه‌ای مرتب می‌کنیم که هر دو عددی که مجموعشان ۸۵ است کنار هم باشند و خواهیم داشت:

$\{۱,۸۴\}\ \{۲,۸۳\}\ \{۳,۸۲\}...\{۴۲,۴۳\}$

اگر هرکدام از این مجموعه‌ها را لانه در نظر بگیریم، ۴۲ لانه خواهیم داشت. بنابراین طبق اصل لانه‌کبوتری اگر ۴۳ کبوتر داشته باشیم، حداقل یک لانه وجود دارد که حداقل دو کبوتر در آن باشد، در نتیجه اگر ۴۳ عدد انتخاب کنیم حداقل یک جفت عدد با مجموع ۸۵ در آن‌ها وجود دارد.